UFRGS – Instituto de Matemática – 2015/1
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01354 Cálculo e Geometria Analítica IIA
PROVA 1 – 08 de abril de 2015 – 08h30

1	**2**	**3**	**4**	**5**	081

Nome	**Cartão**	**Turma**	**Chamada**

0811 Considere os pontos $A = (2, 3, 5)$, $B = (7, -1, 0)$ e $C = (1, 3, 2)$ do espaço. Obtenha

1. as equações paramétricas da reta que contém os pontos A e B;
2. a equação do plano que contém os pontos A, B e C.

0812 Considere a função $f(x, y) = e^{2x}\,\mathrm{sen}(3y)$.

1. Calcule as parciais $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$ e $f_{yx}(x, y)$.
2. Mostre que, em cada ponto (x, y) do domínio de f, as parciais de segunda ordem de f satisfazem a equação

$$9\, f_{xx}(x, y) + 4\, f_{yy}(x, y) = 0.$$

0813 Considere a função $f(x, y, z) = \dfrac{x + y}{y + z}$ e o ponto $P_0 = (-3, 1, 1)$. Obtenha

1. a equação do plano tangente à superfície de nível de f pelo ponto P_0;
2. a aproximação linear local $L(-2{,}98; 1{,}03; 0{,}98)$ de f no ponto P_0.

0814 Localize e classifique[1] todos os pontos críticos da função

$$f(x, y) = x^4 - 2x^2 + y^2 + 4y - 2.$$

0815 Pretende-se fabricar uma caixinha de papelão com tampa de faces retangulares tal que nas faces superior e inferior tenha duas camadas de papelão. Usando multiplicador de Lagrange, determine as dimensões que minimizam o gasto com papelão de uma caixinha dessas com um volume de 686 cm^3.

[1]Lembre que, escrevendo $D = [f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2]\big|_P$ no ponto crítico P de $f(x, y)$, valem

a) $D > 0$ e $f_{xx}(P) < 0 \implies P$ é ponto de máximo local de f;
b) $D > 0$ e $f_{xx}(P) > 0 \implies P$ é ponto de mínimo local de f;
c) $D < 0 \implies P$ é ponto de sela de f.

UFRGS – Instituto de Matemática – 2015/1 Departamento de Matemática Pura e Aplicada MAT01354 Cálculo e Geometria Analítica IIA PROVA 1 – 08 de abril de 2015 – 10h30	1	2	3	4	5	101

Nome	Cartão	Turma	Chamada

1011 Considere as duas retas concorrentes de equações paramétricas dadas por $x = 4 + t$, $y = -1 - t$, $z = 9 + 3t$ e $x = 8 + 2t$, $y = 4 + t$, $z = 6 + t$. Obtenha

1. as coordenadas do ponto P de interseção dessas retas;
2. a equação do plano que contém essas duas retas.

1012 Considere a função $f(x, y) = e^{3x} \cos(4y)$.

1. Calcule as parciais $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$ e $f_{yx}(x, y)$.
2. Mostre que, em cada ponto (x, y) do domínio de f, as parciais de segunda ordem de f satisfazem a equação

$$16\, f_{xx}(x, y) + 9\, f_{yy}(x, y) = 0.$$

1013 Considere a função $f(x, y, z) = \dfrac{z - x}{z + y}$ e o ponto $P_0 = (7, 2, 1)$. Obtenha

1. a taxa de variação da função f no ponto P_0 na direção e sentido do vetor $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$;
2. a aproximação linear local $L(6{,}97; 2{,}03; 0{,}98)$ de f no ponto P_0.

1014 Localize e classifique[1] todos os pontos críticos da função

$$f(x, y) = x^2 y - 2xy + 2y^2 - 15.$$

1015 Pretende-se fabricar uma caixinha de papelão com tampa de faces retangulares tal que na face inferior tenha duas camadas de papelão. Usando multiplicador de Lagrange, determine as dimensões que minimizam o gasto com papelão de uma caixinha dessas com um volume de 768 cm^3.

[1]Lembre que, escrevendo $D = [f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2]\big|_P$ no ponto crítico P de $f(x, y)$, valem

a) $D > 0$ e $f_{xx}(P) < 0 \implies P$ é ponto de máximo local de f;
b) $D > 0$ e $f_{xx}(P) > 0 \implies P$ é ponto de mínimo local de f;
c) $D < 0 \implies P$ é ponto de sela de f.

UFRGS – Instituto de Matemática – 2015/1
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01354 Cálculo e Geometria Analítica IIA
PROVA 1 – 08 de abril de 2015 – 13h30

1	**2**	**3**	**4**	**5**	131

Nome	**Cartão**	**Turma**	**Chamada**

$\boxed{\textbf{1311}}$ Considere os planos de equações $x - y + 3z = 4$ e $2x + y + z = 8$. Obtenha

1. as equações paramétricas da reta determinada pelos dois planos;
2. a equação do plano pela origem que é perpendicular aos dois planos.

$\boxed{\textbf{1312}}$ Considere a função $f(x,y) = \ln(5\,x^2 + 6\,y^2)$.

1. Calcule as parciais $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$ e $f_{yx}(x,y)$.
2. Mostre que, em cada ponto (x,y) do domínio de f, as parciais de segunda ordem de f satisfazem a equação

$$6\,f_{xx}(x,y) + 5\,f_{yy}(x,y) = 0.$$

$\boxed{\textbf{1313}}$ Considere dados a função $f(x,y,z) = \sqrt{1 + x + y^2 + z^3}$ e o ponto $P_0 = (3,2,1)$. Obtenha

1. a maior taxa de variação de f no ponto P_0;
2. a equação da reta normal à superfície de nível de f pelo ponto P_0.

$\boxed{\textbf{1314}}$ Localize e classifique[1] todos os pontos críticos da função

$$f(x,y) = x^2y - 2xy + 2y^2 - 15y.$$

$\boxed{\textbf{1315}}$ Um granjeiro dispõe de um crédito de tela de arame em uma cooperativa e resolve construir num terreno plano uma gaiola em forma de caixa retangular, em que apenas as paredes laterais e o teto serão de tela. Usando multiplicador de Lagrange, determine as dimensões da gaiola de maior volume que poderá ser assim construída com 48 m^2 de tela.

[1] Lembre que, escrevendo $D = [f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2]\big|_P$ no ponto crítico P de $f(x,y)$, valem

$$\begin{aligned} &a)\quad D > 0 \quad \text{e} \quad f_{xx}(P) < 0 \implies P \text{ é ponto de máximo local de } f;\\ &b)\quad D > 0 \quad \text{e} \quad f_{xx}(P) > 0 \implies P \text{ é ponto de mínimo local de } f;\\ &c)\quad D < 0 \implies P \text{ é ponto de sela de } f. \end{aligned}$$

1	2	3	4	5	151

Nome	Cartão	Turma	Chamada

1511 Considere as duas retas paralelas e sem ponto em comum de equações paramétricas $x = 2+t$, $y = 1-t$, $z = 3+3t$ e $x = 8-2t$, $y = 4+2t$, $z = 6-6t$.

1. Obtenha as equações da reta pelo ponto $(1, 1, 1)$ que é paralela a essas duas retas.
2. Obtenha a equação do plano determinado por essas duas retas.

1512 Considere a função $f(x, y) = e^{2x} \ln(5y)$.

1. Calcule as parciais $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$, $f_{xx}(x, y)$ e $f_{yx}(x, y)$.
2. Mostre que, em cada ponto (x, y) do domínio de f, as parciais de segunda ordem de f satisfazem a equação

$$f_{xy}(x, y) + 2\,y\,f_{yy}(x, y) = 0.$$

1513 Considere a função $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 + y^2}{z + y}$ e o ponto $P_0 = (1, 1, 1)$. Obtenha

1. a equação do plano tangente à superfície de nível de f pelo ponto P_0;
2. a taxa de variação da função f no ponto P_0 na direção e sentido do vetor $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

1514 Localize e classifique[1] todos os pontos críticos da função

$$f(x, y) = x^2 + xy^2 - 4x + 5.$$

1515 Um granjeiro pretende construir num terreno plano uma gaiola em forma de caixa retangular com um volume de 72 m^3. As paredes laterais serão revestidas de tela e o telhado coberto com telhas. Sabendo que o metro quadrado de tela custa 30$ e o metro quadrado de telha custa 20$, use multiplicador de Lagrange para determinar as dimensões da gaiola que minimizam o custo com tela e telha (em $).

[1] Lembre que, escrevendo $D = [f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2]\big|_P$ no ponto crítico P de $f(x, y)$, valem

a) $D > 0$ e $f_{xx}(P) < 0 \implies P$ é ponto de máximo local de f;
b) $D > 0$ e $f_{xx}(P) > 0 \implies P$ é ponto de mínimo local de f;
c) $D < 0 \implies P$ é ponto de sela de f.

UFRGS – Instituto de Matemática – 2015/1
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01354 Cálculo e Geometria Analítica IIA
PROVA 1 – 08 de abril de 2015 – 18h30

1	2	3	4	5	181

Nome	Cartão	Turma	Chamada

1811 Considere os pontos $P = (2, 1, -3)$ e $Q = (4, -3, 5)$ do espaço e a reta L determinada por esses dois pontos. Obtenha

1. as equações paramétricas da reta L;
2. a equação do plano que é perpendicular a L e passa pelo ponto P.

1812 Considere a função $f(x, y) = \operatorname{sen}(2\,x)\,\cos(3\,y)$.

1. Calcule as parciais $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$ e $f_{yx}(x, y)$.
2. Mostre que, em cada ponto (x, y) do domínio de f, as parciais de segunda ordem de f satisfazem a equação

$$9\,f_{xx}(x, y) - 4\,f_{yy}(x, y) = 0.$$

1813 Considere a função $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ e o ponto $P_0 = (1, 2, 2)$. Obtenha

1. a maior taxa de variação de f no ponto P_0;
2. a equação do plano tangente à superfície de nível de f pelo ponto P_0.

1814 Localize e classifique[1] todos os pontos críticos da função

$$f(x, y) = x^3 - 6x^2 - 3y^2.$$

1815 O custo da construção de um metro quadrado de fundo de um tanque é de 5\$ e o do metro quadrado de parede lateral é de 20\$. Usando multiplicador de Lagrange, calcule as dimensões de um tanque aberto no topo com base e paredes retangulares com capacidade de 64 m^3 e de custo (em \$) mínimo.

[1]Lembre que, escrevendo $D = [f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2]\big|_P$ no ponto crítico P de $f(x, y)$, valem

a) $D > 0$ e $f_{xx}(P) < 0 \implies P$ é ponto de máximo local de f;
b) $D > 0$ e $f_{xx}(P) > 0 \implies P$ é ponto de mínimo local de f;
c) $D < 0 \implies P$ é ponto de sela de f.